

国立志望受験生，最難関大を目指す高1・高2 | 物理 解答解説 単振動の基礎～標準 チェック例題

入試レベルに挑戦してみよう！ 例題2題で手順を確かめ，問題2題（国立大レベル）で入試に挑む。
微分・積分は使わない。

§0 単振動で必要なのはこの2つ

結論

①振動の中心 x_c 運動方程式から出た加速度を，次の形と比べる。

$$a = -\omega^2(x - x_c)$$

②振幅 A 中心からの変位と速さの組を，エネルギー保存則か「 x と v の関係式」に入れる。

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x - x_c)^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{または} \quad \left(\frac{x - x_c}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{A\omega}\right)^2 = 1$$

(k はばね1本ならばね定数。一般には復元力の比例定数で， $k = m\omega^2$)

この2つが決まれば，**図が描けて，動きが分かる。**

● ここでは，次の順に話す

§1【参考】参考円で $x \cdot v \cdot a$ と周期を確かめる（復習）

§2 振動の中心を求める

§3 エネルギーはこう使う

§4 振幅の決め方（勝負どころ。 x と v の関係式もここで導く）

§5 3ステップで図を描く

§6 解き方チェック

例題1・2と問題1・2も，この順番で解いていく。

§1 【参考】参考円で $x \cdot v \cdot a$ と周期を確かめる

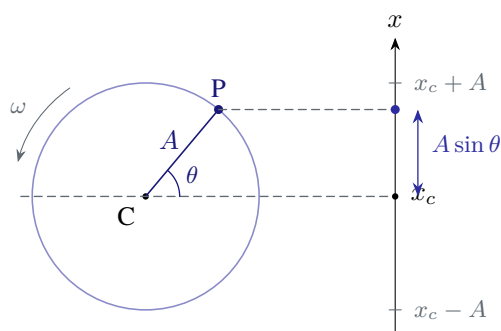
復習

参考 ここで確かめること

単振動は、等速円運動の正射影である。 $x \cdot v \cdot a$ も周期も、この円（参考円）から読める。

● 位置

半径 A の円周上を、角速度 ω で回る点 P を考える。 P を x 軸に正射影した点が、単振動する物体の位置である。

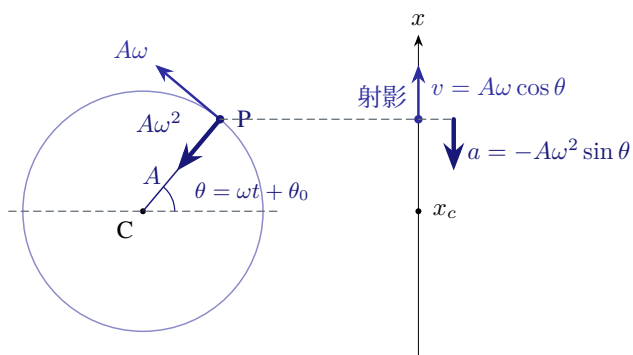


x 軸は上向きを正とする。角 θ は C から右向きの水平線を基準に、反時計回りに測る。時刻 t の角を $\theta = \omega t + \theta_0$ とすると

$$x = x_c + A \sin(\omega t + \theta_0).$$

● 速度と加速度

P の速度は接線の向きで大きさ $A\omega$ 。加速度は中心 C の向きで大きさ $A\omega^2$ 。その x 成分が、物体の速度と加速度である。



$$v = A\omega \cos(\omega t + \theta_0)$$

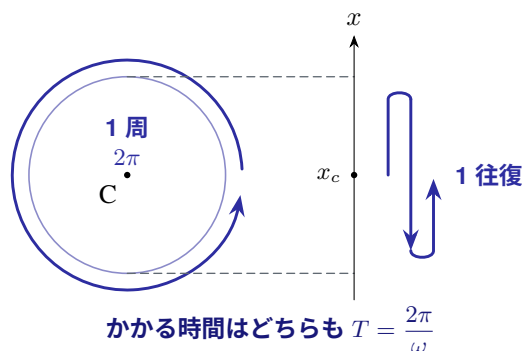
$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \theta_0)$$

a の式に $A \sin(\omega t + \theta_0) = x - x_c$ を入れると

$$a = -\omega^2(x - x_c)$$

加速度はいつも振動の中心を向き、振動の中心からの変位に比例する。単振動では、この ω を**角振動数**という。参考円の点の角速度と同じ値である。

● 周期は、円運動の周期と同じ



参考円を1周すると、物体はちょうど1往復する。だから単振動の周期は、参考円を1周する時間に等しい。

ω は「1秒あたりに回る角」である（単位 rad/s）。1周は 2π rad だから、1周にかかる時間は

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

これは等速円運動の周期の式そのもの。新しく覚える式ではない。

§2 振動の中心を求める

結論

任意の位置 x で運動方程式を立て、加速度を $a = -\omega^2(x - x_c)$ と比べる。
振動の中心 x_c と ω (周期 $T = 2\pi/\omega$) が、いっぺんに出る。

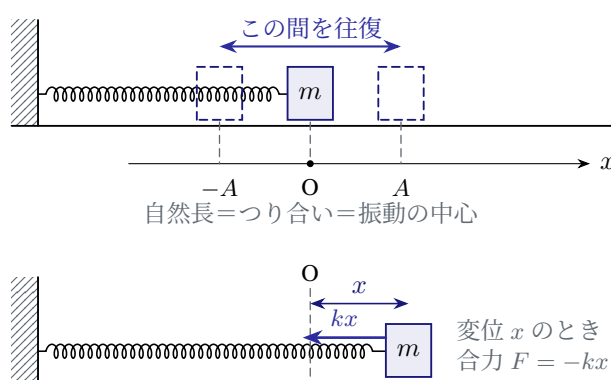


運動方程式で出てきた加速度を、この $a = -\omega^2(x - x_c)$ と比較して解く！

● 横たえたばね

なめらかな水平面上で、ばね定数 k のばねに質量 m の物体をつなぐ。水平方向の力は弾性力だけなので、ばねが自然長のときがつり合いの位置、すなわち振動の中心 O である。

O から A だけ引いて静かにはなせば、物体は O を中心に $-A$ と A の間を往復する。



では、運動方程式でちゃんと解いてみよう。

O を原点に、右向きに x 軸をとる。変位 x のとき、弾性力の x 成分は $-kx$ である。運動方程式は

$$ma = -kx \quad \therefore \quad a = -\frac{k}{m}x.$$

$a = -\omega^2(x - x_c)$ と比べる。

$$a = -\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} (x - \underbrace{0}_{x_c}) \quad \Rightarrow \quad x_c = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

この T に振幅 A は入っていない。大きく振らせても小さく振らせても、周期は同じである。

● 鉛直につるしたばね

ここでやりたいのは、振動の中心を出すことである。

つり合いの式 $kx_0 = mg$ から、中心は自然長より $x_0 = \frac{mg}{k}$ だけ下とわかる。でも、運動方程式から加速度を出して比べれば、**中心の座標も周期も全部出る**。

自然長の位置を原点に、下向きに x 軸をとる。位置 x では、ばねの伸びは x である ($x < 0$ なら縮みだが、式はそのまま使える)。重力 mg (下向き) と弾性力 kx (上向き) がはたらくので

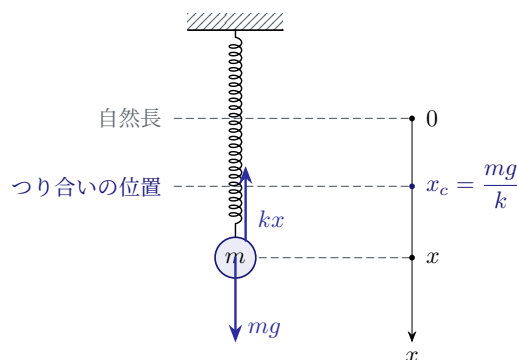
$$ma = mg - kx$$

$$\therefore a = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{mg}{k}\right).$$

$a = -\omega^2(x - x_c)$ と比べる。

$$a = -\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2}\left(x - \underbrace{\frac{mg}{k}}_{x_c}\right) \Rightarrow x_c = \frac{mg}{k}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

加速度が 0 になるのは $x = x_c$ のときだけ。加速度 0 は力のつり合いだから、**振動の中心はつり合いの位置**である。周期は横たえたばねと同じで、重力は中心をずらすだけである。



§3 エネルギーはこう使う：振動の中心から測る

結論

振動の中心を原点にとり、そこからの変位を x とする。重力の位置エネルギーは $\frac{1}{2}kx^2$ にまとめて入っているので、別に書かなくてよい。

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{一定}$$

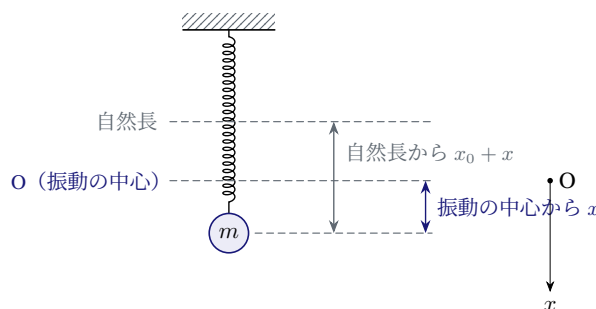
鉛直ばねで比べてみる。自然長から振動の中心 O までの伸びを x_0 とし、O から下向きに変位 x とする。重力の位置エネルギーの基準は O にする。

ばねの伸びを自然長から測ると (項が 3 つ)

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x_0 + x)^2 - mgx = \text{一定}$$

振動の中心から測ると (項が 2 つ)

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{一定}$$



振動の中心から測った変位 x で位置エネルギーを $\frac{1}{2}kx^2$ と書けば、重力の位置エネルギーは書かなくていい！

参考 重力の項が消えるわけ

自然長から測った式を展開すると

$$\frac{1}{2}k(x_0 + x)^2 - mgx = \frac{1}{2}kx^2 + \underbrace{(kx_0 - mg)}_{=0}x + \frac{1}{2}kx_0^2.$$

つり合いの式 $kx_0 = mg$ で、 x の 1 次の項が消える。残る $\frac{1}{2}kx_0^2$ は定数なので、「一定」にまとめてよい。つまり $\frac{1}{2}kx^2$ は弾性エネルギーそのものではなく、重力の位置エネルギーとの和である。

⚠ 勝負どころ! ⚠

§4 振幅の決め方：よく出題される 3 パターン

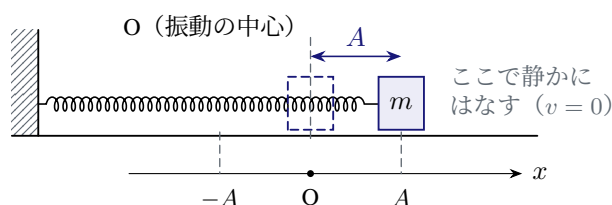
結論

振幅は、「振動の中心からの変位 X 」と「そこでの速さ」の組で決まる。
次の 3 パターンを押さえれば、ほとんどの問題に対応できる。

• (a) 端で静かにはなす

静かにはなした位置は、速さ 0 の端である。
だから振幅は、振動の中心からはなした位置までの距離。

$A = (\text{中心から、はなした位置までの距離})$

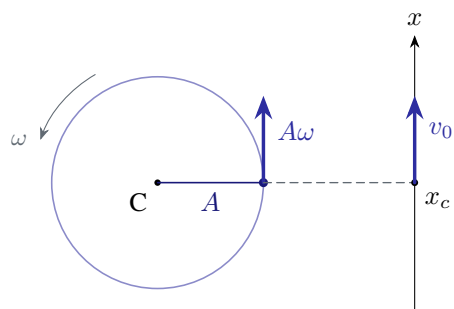


• (b) 振動の中心で速さ v_0 を与える

物体が振動の中心から正の向き（上）に動き出すとき、参考円の点は C の右真横にいる（右の図）。

点の速度は真上を向き、大きさは $A\omega$ 。速度が x 軸と平行なので、これがそのまま物体の速さになる。だから

$$v_0 = A\omega \quad \therefore \quad A = \frac{v_0}{\omega} = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}.$$



振動の中心を通るとき、点は C の右真横。
点の速さ $A\omega$ がそのまま物体の速さ

別解 エネルギー保存則でも出せる。 $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kA^2$ より $A = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$ 。

速さの最大値は $v_{\max} = A\omega$ **（振動の中心を通るとき）**

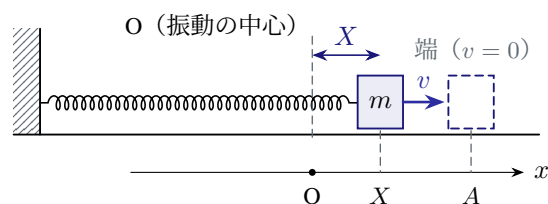
● (c) 途中の位置で速さがわかる

物体が、振動の中心から X の位置を速さ v で通過している。

まず、エネルギー保存則 (§3 の形) で立式する。端では速さ 0、中心からの距離は A だから

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kX^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\therefore A = \sqrt{X^2 + \frac{m}{k}v^2}.$$



参考 x と v の関係式

§1 の 2 つの式

$$x - x_c = A \sin(\omega t + \theta_0), \quad v = A\omega \cos(\omega t + \theta_0)$$

を、それぞれ A と $A\omega$ で割り、2 乗して足す。 $\sin^2 + \cos^2 = 1$ で時刻 t が消えて

$$\left(\frac{x - x_c}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{A\omega}\right)^2 = 1$$

時刻がわからなくても、位置と速度の組はいつもこの式を満たす (2 乗するので v の符号は関係ない)。(c) の X と v を入れると

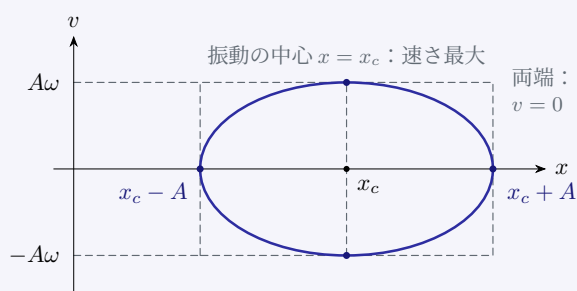
$$\left(\frac{X}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{A\omega}\right)^2 = 1 \quad \therefore A = \sqrt{X^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}$$

と、一発で出る。**これはめっちゃ便利だから、覚えておこう。**両辺に $\frac{1}{2}kA^2$ をかけ、 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ を使うと $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kX^2 = \frac{1}{2}kA^2$ 。中身はエネルギー保存則そのものである。

図で見ると

横軸に x 、縦軸に v をとると、この式は右の楕円になる。楕円の式を知らない人は気にしなくてよい。

	速さ $ v $	加速度の大きさ $ a $
振動の中心	最大 $A\omega$	0
両端	0	最大 $A\omega^2$



ここが肝 (a) は速さが 0, (b) は変位が 0 の場合。どちらも 0 でなければ (c) のエネルギー保存則で解く。

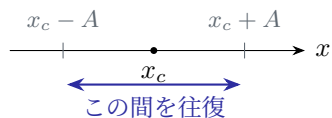
§5 3 ステップで図を描く

中心と振幅が決まれば、図が描けて動きが分かる。ここからは、この3ステップで解ける。

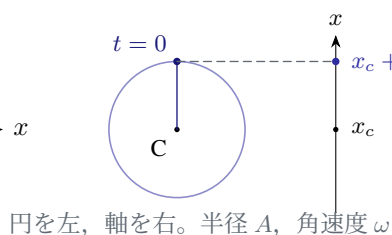
中心と振幅から、図を描く3ステップ

- 1 **数直線** 振動の中心 x_c と、両端 $x_c \pm A$ を書く。
- 2 **参考円** 半径 A の円を左に描き、 $t = 0$ の点の位置を決める。正の端なら真上、負の端なら真下。振動の中心なら真横（正の向きに動き出すなら右、負の向きなら左）。
- 3 **$x-t$ グラフ** $t = 0$ から動きを追い、グラフを横に描く。式はグラフから読む。

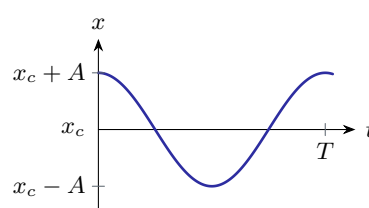
1. 数直線



2. 参考円



3. $x-t$ グラフ



● 例：端で静かにはなしたときの $x-t$ グラフ

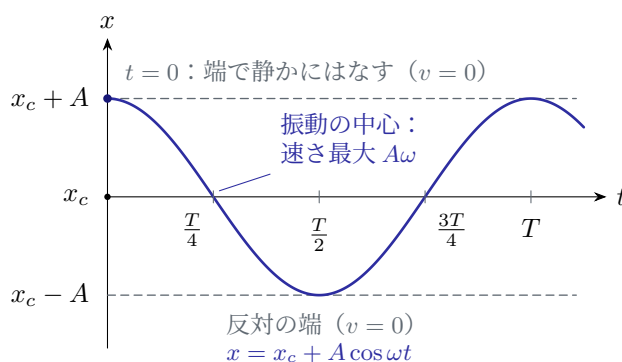
動きを追いかける。

- $t = 0$: 端 $x_c + A$ (速さ 0)
- $\frac{T}{4}$: 振動の中心 (速さ最大 $A\omega$)
- $\frac{T}{2}$: 反対の端 $x_c - A$ (速さ 0)
- T : もとの端に戻る

このグラフは $\cos$ の形だから

$$x = x_c + A \cos \omega t.$$

参考円の出発点は真上 ($\theta_0 = 90^\circ$) なので、§1 の式でも $A \sin(\omega t + 90^\circ) = A \cos \omega t$ となる。



§6 解き方チェック

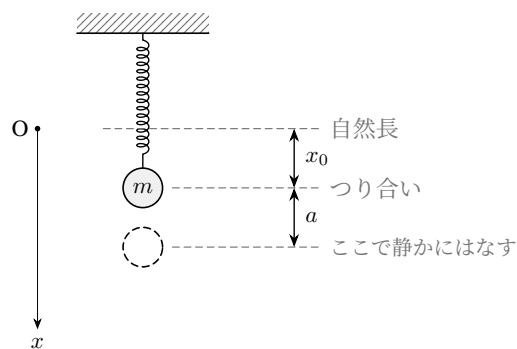
例題・問題も、この順で解く

- ☐ **振動の中心** 運動方程式の加速度を $a = -\omega^2(x - x_c)$ と比べた？ (§2)
- ☐ **エネルギー** 位置エネルギーを振動の中心から測った？ (§3)
- ☐ **振幅** 3 パターンのどれか見分けた？ (§4)
- ☐ **図** 数直線, 参考円, $x-t$ グラフの順に描いた？ (§5)

例題で確認する — 基本の手順をそのまま使う

例題 1

図のように、ばね定数 k の軽いばねの上端を天井に固定し、下端に質量 m のおもりをつるす。ばねが自然長のときのおもりの位置を原点 O とし、 O から鉛直下向きに x 軸をとる。おもりをつり合いの位置から a だけ引き下げて静かにはなしたところ、おもりは鉛直方向に単振動した。重力加速度の大きさを g とし、ばねの質量と空気抵抗は無視する。



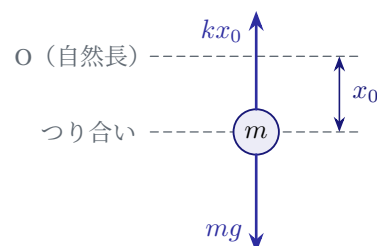
- (1) おもりがつり合う位置の座標 x_0 を求めよ。
- (2) おもりの座標が x のとき、おもりの加速度 a_x (x 軸の正の向きを正) を求めよ。
- (3) 単振動の角振動数 ω と周期 T を求めよ。
- (4) おもりの速さの最大値 $v_{\max}$ を求めよ。

解説

振動の中心 (1) つり合いの位置

おもりにはたらく力は、重力 mg (下向き) とばねの弾性力 (上向き) の2つ。つり合いの位置ではばねが x_0 伸びているので、弾性力は kx_0 。つり合いより

$$kx_0 = mg \quad \therefore \quad x_0 = \frac{mg}{k}.$$



$$x_0 = \frac{mg}{k} \quad \cdots (\text{答})$$

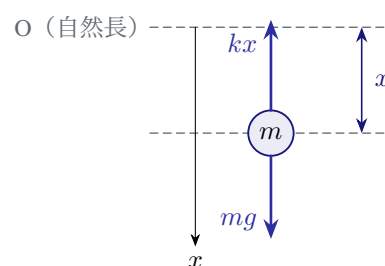
振動の中心 (2) 任意の座標 x で運動方程式

原点 O が自然長の位置なので、座標 x でのばねの伸びはそのまま x である (右の図)。下向きを正として

$$ma_x = mg - kx$$

$$\therefore a_x = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{mg}{k}\right).$$

$a_x = -\omega^2(x - x_c)$ の形になった。括弧の中を見ると、振動の中心は $x_c = \frac{mg}{k}$ である。



$$a_x = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{mg}{k}\right) \quad \dots (\text{答})$$



ほら！ 運動方程式から出てきた振動の中心 $x_c = \frac{mg}{k}$ は、(1) で求めたつり合いの位置 x_0 とぴったり一致したね！

振動の中心 (3) 角振動数と周期 — $a_x = -\omega^2(x - x_c)$ と比べる

(2) の式を $a_x = -\omega^2(x - x_c)$ と見比べると、 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ 。よって

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

横たえたばねとまったく同じ周期である。重力は振動の中心を x_0 だけ下へずらすだけで、周期を変えない。

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \dots (\text{答})$$

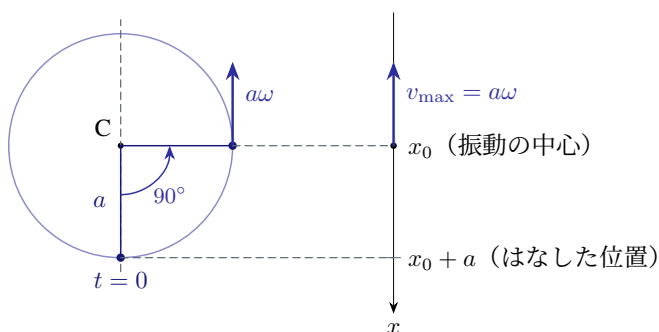
振幅 (4) 速さの最大値 — 端ではなしたので振幅は a

つり合いの位置 (振動の中心) から a だけ引き下げて「静かに」はなした。はなした位置が速さ 0 の端だから、**振幅は a** (§4 (a))。速さが最大になるのは、振動の中心を通るときである。

考え1 参考円で読む

参考円は半径 a 、角速度 ω 。おもりが振動の中心を通るとき、円周上の点は C の真横にいて、その速さ $a\omega$ がそのまま射影の速さになる (右の図)。

$$v_{\max} = a\omega = a\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

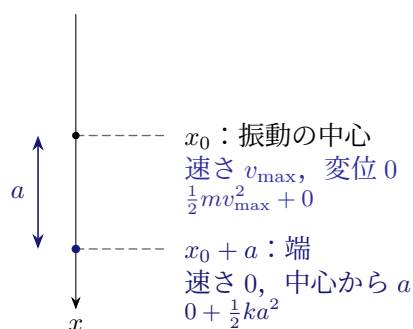


考え2 エネルギー保存則で解く

§3 のとおり，振動の中心からの変位 x で位置エネルギーを $\frac{1}{2}kx^2$ と書く。重力の位置エネルギーは別に書かない。端 ($x = a$, 速さ 0) と中心 ($x = 0$, 速さ $v_{\max}$) とで

$$\frac{1}{2}ka^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \quad \therefore \quad v_{\max} = a\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

参考円と同じ答になる。



$$v_{\max} = a\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \cdots (\text{答})$$



今まで重力の位置エネルギーも別に書いていた人は，ここで「振動の中心から測る」エネルギーの使い方をマスターしておこう！

参考 x と v の関係式を使うと

§4 (c) の関係式に，振動の中心 $x - x_c = 0$ を入れる。

$$\left(\frac{0}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{a\omega}\right)^2 = 1 \quad \therefore \quad v = \pm a\omega.$$

中心では $|v| = a\omega$ で，これが速さの最大値。「中心からの変位」と「速さ」のどちらか一方が分かれば，もう一方がこの式から出る。

時刻と速さ — 参考円とグラフで読む

例題 2

例題 1 と同じばねとおもりを使う。今度は，おもりがつり合う位置を原点 O とし， O から鉛直下向きに x 軸をとる。時刻 $t = 0$ におもりを $x = a$ の位置で静かにはなす。 $\omega = \sqrt{k/m}$, $T = 2\pi/\omega$ とする。

- (1) おもりの変位 x と速度 v (x 軸の正の向きを正) を，時刻 t の式で表せ。
- (2) はなしてから始めて O を通過する時刻 t_1 と，始めて $x = -\frac{a}{2}$ となる時刻 t_2 を求めよ。
- (3) $x = \frac{a}{2}$ を通過するときのおもりの速さを求めよ。

解説

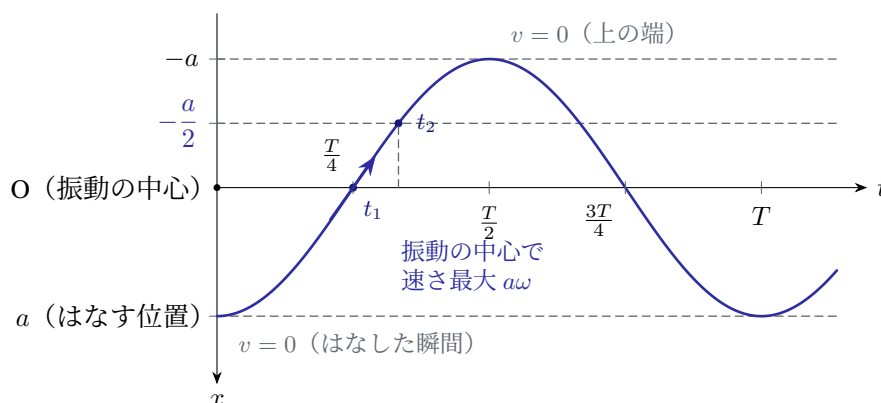
振動の中心は O ，振幅は a (端で静かにはなした。§4 (a))。2 つが決まったので，あとは §5 の 3 ス

テップで図を描く。

図 (1) 解き方 A：現象を追いかけて、グラフを横に描く

まず式を書かずに、運動を追いかける。 $t=0$ 、おもりは $x=a$ で速さ 0。合力（弾性力－重力）が上向きなので上向きに動き出し、速さを増しながら $\frac{T}{4}$ で振動の中心 O を通過する（ここで速さ最大 $a\omega$ ）。さらに上がって $\frac{T}{2}$ で $x=-a$ に達し、一瞬止まる。あとは逆向きに同じことを繰り返し、 T で $x=a$ に戻る。

この様子を、 x 軸を問題と同じ鉛直下向きにとり、 t 軸を右へにとって描くと下の図になる。



$t=0$ で最大値 a から始まるグラフだから、これは $\cos$ 型である。グラフから

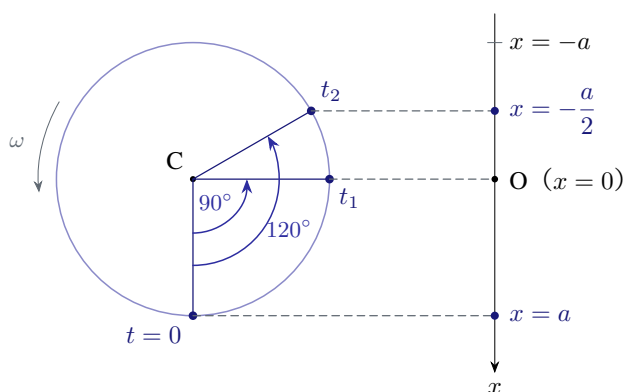
$$x = a \cos \omega t.$$

図 (1) 解き方 B：参考円から

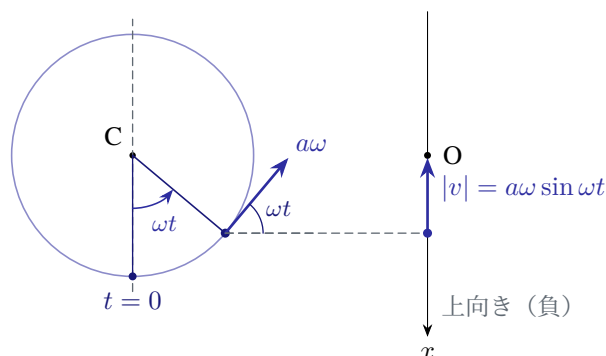
半径 a の参考円を左に描き、その右に、 x 軸を鉛直下向きにとる。 $t=0$ でおもりは $x=a$ にいるので、参考円の点は最下点（ x 軸の a に射影される位置）から出発する。点はここから角速度 ω で回り、時刻 t までに回る角は ωt である。出発点から測った角 ωt で射影すると

$$x = a \cos \omega t.$$

解き方 A と同じ式が出る。「 $t=0$ に正の端なら $a \cos \omega t$ 、負の端なら $-a \cos \omega t$ 、振動の中心にいるなら $\pm a \sin \omega t$ 」と、参考円の出発点から読む。これは §5 の例（端で静かにはなす $\rightarrow x = x_c + A \cos \omega t$ ）と同じである。ここでは出発点から回った角 ωt で直接読んだ。 x 軸を下向きにとったので、正の端は参考円の最下点になる（§5 の Step 2 では真上だが、ここでは真下）。



速度：円周上の点の速さは $a\omega$ で、向きは接線方向。おもりの速度はその x 軸方向の成分である（右の図）。点が出発点から ωt 回ると、半径も ωt だけ傾く。速度ベクトルは半径に垂直だから、これも同じ ωt だけ傾き、水平方向と角 ωt をなす（ x 軸とは $90^\circ - \omega t$ ）。したがって x 軸方向の成分の大きさは $a\omega \sin \omega t$ 。 $t = 0$ の直後、おもりは上向き（ x 軸の負の向き）に動くから



$$v = -a\omega \sin \omega t.$$

符号は「はなした直後に負の向きへ動く」ことから決める。 x が $\cos$ なら v は $-\sin$ ，というように 90° ずれる。これが参考円の「射影の成分」の意味である。

$$x = a \cos \omega t, \quad v = -a\omega \sin \omega t \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \quad \cdots \text{ (答)}$$

図 (2) 時刻は参考円の角度で読む

O を通過するのは $x = 0$ ，すなわち参考円の点が出発点から 90° 回ったときである。 $\omega t_1 = \frac{\pi}{2}$ より

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4}.$$

$x = -\frac{a}{2}$ となるのは $\cos \omega t = -\frac{1}{2}$ ，すなわち点が出発点から 120° 回ったときである。 $\omega t_2 = \frac{2\pi}{3}$ より

$$t_2 = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{T}{3}.$$

グラフ（解き方 A の図）でも、 $x = 0$ が $\frac{T}{4}$ ， $x = -\frac{a}{2}$ が $\frac{T}{4}$ と $\frac{T}{2}$ の間の $\frac{T}{3}$ にあることが読める。

注意してほしいのは、 O から $x = -\frac{a}{2}$ まで（距離 $\frac{a}{2}$ ）にかかる時間が $t_2 - t_1 = \frac{T}{12}$ で、 $x = -\frac{a}{2}$ から端 $x = -a$ まで（同じ距離 $\frac{a}{2}$ ）にかかる時間は $\frac{T}{2} - \frac{T}{3} = \frac{T}{6}$ と 2 倍になることである。端に近いほど遅い。距離が等しくても時間は等しくない。

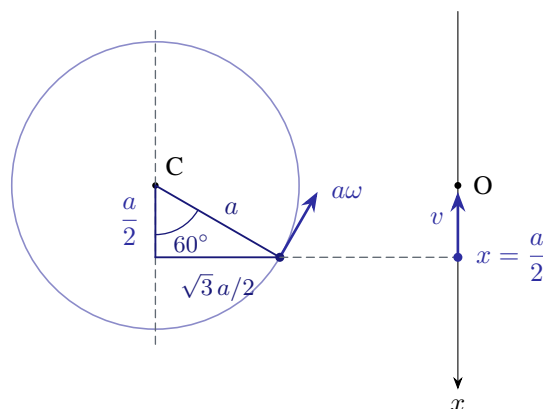
$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad t_2 = \frac{T}{3} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \cdots \text{ (答)}$$

振幅 (3) 速さを読む —— 参考円でも、エネルギー保存則でもよい

考え1 参考円の直角三角形で読む

$x = \frac{a}{2}$ のとき、参考円の点は出発点から 60° 回った位置にある ($\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$)。点の速度の大きさは $a\omega$ で、おもりの速さはその x 軸方向の成分の大きさだから、直角三角形より

$$|v| = a\omega \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} a \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

**考え2 エネルギー保存則で解く**

§3 のとおり、振動の中心 O からの変位 x で位置エネルギーを $\frac{1}{2}kx^2$ と書けば、重力の位置エネルギーは別に書かなくてよい。はなした位置 ($x = a, v = 0$) と $x = \frac{a}{2}$ とで

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ka^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ \therefore |v| &= \sqrt{\frac{3k}{4m}} a = \frac{\sqrt{3}}{2} a \sqrt{\frac{k}{m}}. \end{aligned}$$

参考円と同じ答になる。鉛直ばねでも、振動の中心から測れば横たえたばねと同じ計算で済む。

参考 x と v の関係式でも

$\left(\frac{x-x_c}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{A\omega}\right)^2 = 1$ に $A = a, x-x_c = \frac{a}{2}$ を入れると $|v| = \frac{\sqrt{3}}{2} a\omega$ 。同じ値になる。

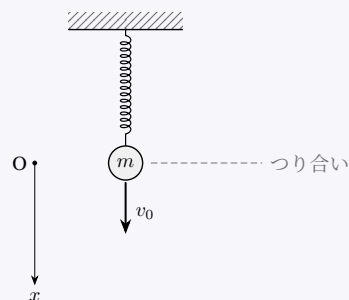
$$|v| = \frac{\sqrt{3}}{2} a \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \dots (\text{答})$$

ここで差がつく

「 $x = \frac{a}{2}$ だから速さも最大の半分」としたくなるが、速さは変位に比例しない。参考円の角度で 60° 、速さは $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍である。時刻も同じで、「距離の半分だから時間も半分」も同じ理由で成り立たない。単振動では、距離・時刻・速さの対応はすべて参考円の角度を通して決まる。グラフを横に描けば、このことが目で確かめられる。

ひとひねり — 初期条件を変えてみる

例題2と同じばねとおもり、同じ x 軸（つり合いの位置が原点 O 、鉛直下向きが正）を使う。今度は、時刻 $t = 0$ におもりを O で鉛直下向きに速さ v_0 で打ち出す。おもりの変位 x と速度 v を、時刻 t の式で表せ。

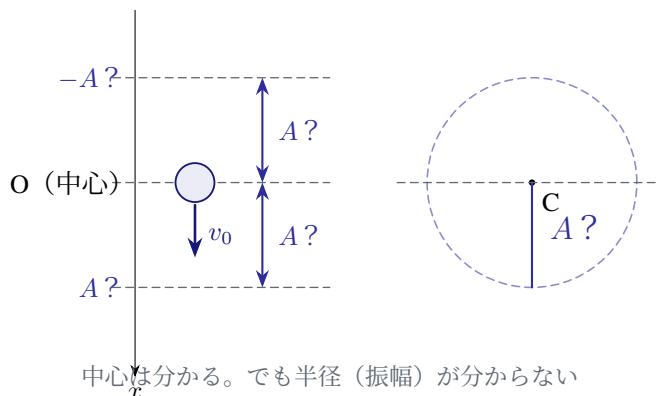


● まず、何が要るか

$x(t)$ と $v(t)$ を書きたい。だから §5 の 3 ステップでグラフを描く。グラフを描くには、振動の中心と振幅の2つが要る。

振動の中心：つり合いの位置 O 。これは分かっている。 $\omega = \sqrt{k/m}$ も例題1と同じ。

振幅：…あれ？ 分からない。端で静かにはなしたわけではないので、「はなした位置までの距離」が使えない。右の図のように、数直線の端も、参考円の半径も、まだ決まっていない。



● 振幅を決める — §4 の (b)：振動の中心で速さ v_0

分かっているのは「振動の中心（変位 0）で速さ v_0 」という組。この組から振幅を決める。

解き方1 エネルギー保存則 中心（変位 0，速さ v_0 ）と端（変位 A ，速さ 0）とで

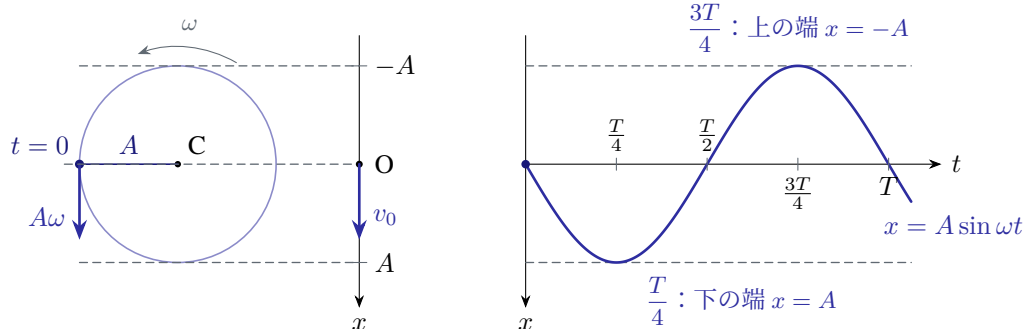
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kA^2 \quad \therefore A = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{v_0}{\omega}.$$

解き方2 x と v の関係式 $x - x_c = 0$ ， $v = v_0$ を入れる。

$$\left(\frac{0}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{A\omega}\right)^2 = 1 \quad \therefore A = \frac{v_0}{\omega}.$$

振動の中心で速さ v_0 なら、振幅は $A = \frac{v_0}{\omega}$

• 振幅が決まった。あとは3ステップ



- **数直線**：中心 O，両端 $x = \pm A$ 。
- **参考円**：半径 A 。 $t = 0$ におもりは中心にいて，下向き（正の向き）に動き出す。 x 軸が下向きなので，次の瞬間に下へ動く点は C の**左真横**。ここが出発点。
- **x - t グラフ**： $t = 0$ で O を下向きに通過（速さ最大 v_0 ） $\rightarrow \frac{T}{4}$ で下の端 $x = A \rightarrow \frac{T}{2}$ で O（上向き） $\rightarrow \frac{3T}{4}$ で上の端 $x = -A \rightarrow T$ で戻る。 $t = 0$ に 0 から増えるグラフだから sin 型。

$$x = A \sin \omega t = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

速度は，中心で最大 v_0 ，端で 0。 $t = 0$ に $+v_0$ だから cos 型で

$$v = v_0 \cos \omega t.$$

$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad v = v_0 \cos \omega t \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \right)$

… (答)

ここが肝 振動の中心が分かっているても，振幅が分からなければグラフは描けない。「中心 $\rightarrow$ 振幅 $\rightarrow$ 図」の順を守る。振幅は，分かっている「変位と速さの組」から決める。

衝突から単振動へ — 衝突は運動量、その後は振動の中心・ ω ・振幅

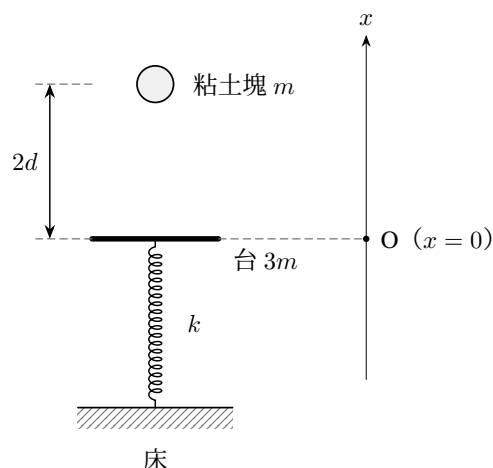
問題 1

国立大レベル 目標時間 15 分

図のように、ばね定数 k の軽いばねを鉛直に置き、下端を床に、上端を質量 $3m$ の薄い水平な台に固定する。台だけを取り付けて静止させたとき、ばねは自然長から d だけ縮んだ。

この台の位置より $2d$ 上方から、質量 m の粘土塊を静かに放す。粘土塊は台に衝突するとただちに付着し、その後は台と一体となって単振動する。衝突前の台の位置を原点とし、鉛直上向きに x 軸をとる。

重力加速度の大きさを g とする。衝突時間は十分短く、その間の重力とばねの弾性力による力積は無視できるものとする。粘土塊の大きさ、台の厚さ、空気抵抗は無視でき、台は水平を保って鉛直方向にのみ動く。ばねは運動の範囲でフックの法則に従い、台が床に触れることはないものとする。



- (1) 台に衝突する直前の粘土塊の速度について、その向きと大きさ v を求めよ。 v は d, g を用いて表せ。
- (2) 衝突直後の粘土塊と台の共通の速度について、その向きと大きさ V を求めよ。 V は d, g を用いて表せ。
- (3) 衝突後、台が初めて最下点に達したときの座標 x_0 を、 d を用いて表せ。 (オリジナル問題)

解説

振動の中心 まず準備 — ばね定数と、衝突後の振動の中心

台だけ (質量 $3m$) がつり合うとき、ばねの縮みは d だから

$$kd = 3mg \quad \therefore k = \frac{3mg}{d}.$$

衝突後は粘土塊と台が一体 (質量 $4m$) で動く。このときのつり合いの位置が新しい振動の中心である。縮み d' は $kd' = 4mg$ より $d' = \frac{4mg}{k} = \frac{4}{3}d$ 。原点 O は縮み d の位置だから、振動の中心は O より $d' - d = \frac{d}{3}$ だけ下、すなわち

$$x_c = -\frac{d}{3}.$$

この問題の設問は (1) 衝突前, (2) 衝突, (3) 衝突後の単振動, の 3 段階に対応している。



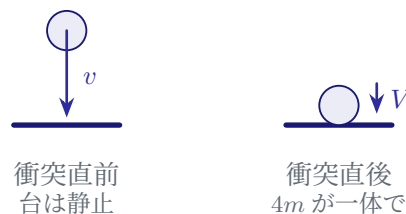
1 物体のときと 2 物体のときでは、つり合いの位置が異なるため、振動の中心の座標がずれることは当然！

(1) 衝突直前 —— 自由落下

粘土塊は高さ $2d$ を自由落下する。力学的エネルギー保存則（または $v^2 = 2gh$ ）より

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg \cdot 2d \quad \therefore v = 2\sqrt{gd}.$$

向きは鉛直下向き。



鉛直下向きに $v = 2\sqrt{gd}$

 … (答)

(2) 衝突 —— 運動量保存

衝突時間は十分短く、その間の重力とばねの弾性力による力積は無視できる。だから衝突の前後で、粘土塊と台の運動量の和は保存する。衝突直前、台は静止している。付着して一体となるので、下向きを正として

$$mv + 3m \cdot 0 = (m + 3m)V \quad \therefore V = \frac{v}{4} = \frac{\sqrt{gd}}{2}.$$

向きは鉛直下向き。粘土が変形する衝突では運動エネルギーは保存しないので、 V は運動量保存で求める。

鉛直下向きに $V = \frac{\sqrt{gd}}{2}$

 … (答)

(3) 衝突後の単振動 —— 中心・ ω ・振幅を取り直し、図で最下点を読む

衝突直後から、質量 $4m$ の物体がばねにつながれた単振動が始まる。§6 の順に進める。

● 振動の中心 中心と角振動数

振動の中心は、準備で求めた $x_c = -\frac{d}{3}$ 。任意の点 x での運動方程式は、ばねの縮みが $d - x$ だから

$$4ma = k(d - x) - 4mg = -k\left(x + \frac{d}{3}\right) \quad (kd = 3mg \text{ を使った}).$$

$a = -\omega^2(x - x_c)$ と比べて

$$\omega^2 = \frac{k}{4m} = \frac{3g}{4d}, \quad x_c = -\frac{d}{3}.$$

中心が準備の値と一致した。

● **振幅** 振幅 —— 衝突直後の「中心からの変位と速さ」から

衝突直後、物体は $x = 0$ にいる。振動の中心 $x_c = -\frac{d}{3}$ から見ると、変位は $X = \frac{d}{3}$ (上)、速さは V (下向き)。この組から振幅を決める (§4 (c))。

考え1 エネルギー保存則 振動の中心から測る。最下点 (速さ 0, 中心から A) と比べて

$$\frac{1}{2}(4m)V^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{d}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

$4mV^2 = mgd$, $k = \frac{3mg}{d}$ を入れて

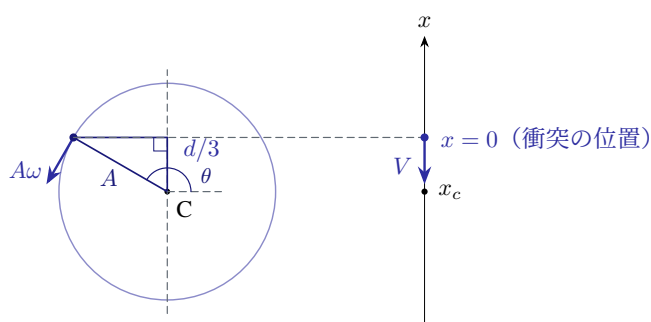
$$mgd + \frac{mgd}{3} = \frac{3mg}{d}A^2 \quad \therefore A^2 = \frac{4d^2}{9}, \quad A = \frac{2d}{3}.$$

考え2 x と v の関係式

$x - x_c = \frac{d}{3}$, $v = -V$ を入れて A^2 について解く。

$$A^2 = \left(\frac{d}{3}\right)^2 + \frac{V^2}{\omega^2} = \frac{d^2}{9} + \frac{gd/4}{3g/(4d)} = \frac{4d^2}{9}.$$

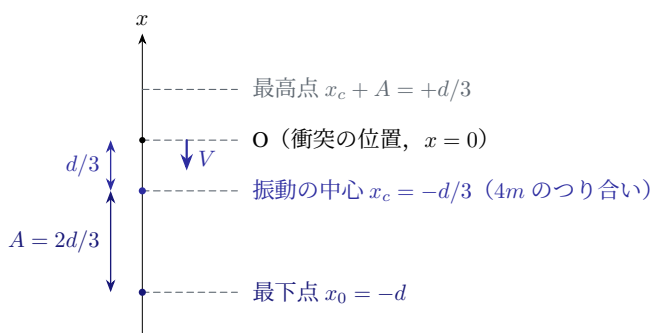
同じ $A = \frac{2d}{3}$ が出る。右の参考円では、衝突直後の点は中心 C から高さ $\frac{d}{3}$, 速度の x 成分が $-V$ になる位置にある。



● **図 数直線で最下点を読む**

中心 $x_c = -\frac{d}{3}$ と振幅 $A = \frac{2d}{3}$ が決まったので、数直線に中心と両端を描く (§5 の Step 1)。最下点は中心から A だけ下なので

$$x_0 = x_c - A = -\frac{d}{3} - \frac{2d}{3} = -d.$$



$$\boxed{x_0 = -d} \quad \cdots (\text{答})$$

ここが要：段階ごとに法則を切り替える

- (1) 衝突前：自由落下 (エネルギー保存または等加速度)。
- (2) 衝突：**運動量保存**。粘土が付着する衝突では運動エネルギーは保存しない。
- (3) 衝突後：**新しい質量でつり合いの位置 (振動の中心) を取り直し**, 任意の点で運動方程式を立てて ω を出し、衝突直後の「振動の中心からの変位と速さ」から振幅を決める。

「衝突の位置 $x = 0$ が振動の中心」と思い込むのが最も多い誤りである。質量が $3m$ から $4m$ に変わったので、つり合いの位置は $\frac{d}{3}$ 下がる。

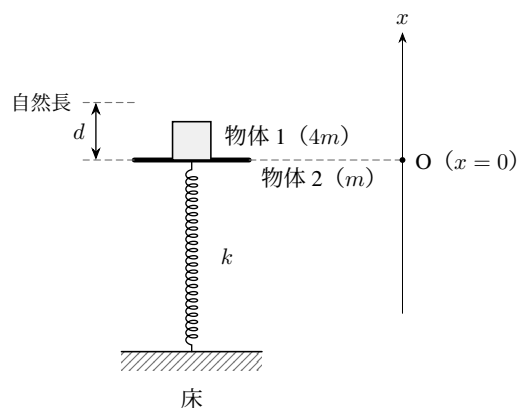
2 物体の単振動 — 接触力・分離・分離後の接続

問題 2

国立大レベル 目標時間 20 分

図のように、軽いばねを鉛直に置き、下端を床に固定する。上端には、質量 m の薄い水平な台（物体 2）を固定する。台の上に質量 $4m$ の小物体（物体 1）を載せて静止させたところ、ばねは自然長から d だけ縮んだ。物体 1 は台に固定されていない。

このつり合いの位置を原点とし、鉛直上向きに x 軸をとる。物体 2 の座標を x 、ばね定数を k 、重力加速度の大きさを g とする。物体 1 の大きさや物体 2 の厚さは無視でき、物体 2 は水平を保って鉛直方向にのみ動くものとする。空気抵抗は無視し、ばねは考える運動の範囲でフックの法則に従い、台が床に触れることはないものとする。



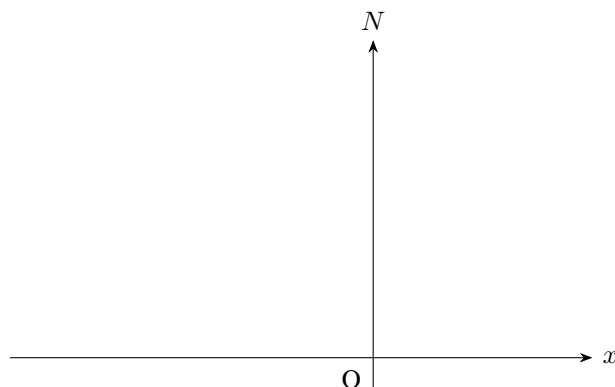
- (1) ばね定数 k を、 m 、 d 、 g を用いて表せ。

次に、つり合いの位置から物体 2 を床に触れない範囲で押し下げ、静かに放す。

- (2) 物体 1 を載せて上昇している物体 2 の座標が x のとき、両物体に共通する加速度 a を、 x 、 d 、 g を用いて表せ。ただし、両物体は接触しており、加速度は鉛直上向きを正とする。
- (3) 両物体が接触を保って単振動する場合、その周期 T を、 d 、 g を用いて表せ。

以下では、物体 1 を載せた状態でのつり合いの位置から、物体 2 を $2d$ だけ押し下げ、静かに放した場合を考える。

- (4) 放した後、物体 2 が物体 1 に及ぼす垂直抗力の大きさ N と物体 2 の座標 x との関係を、下の座標軸に図示せよ。物体 1 が物体 2 から離れることを考慮して定義域を明らかにし、端点と座標軸との交点の値も記入せよ。ただし、最初に離れる瞬間までを考える。



- (5) 物体 1 が物体 2 から離れた後、最初に達する最高点の、原点からの高さを、 d を用いて表せ。
- (6) 物体 1 が離れてから再び接触するまでの物体 2 の運動について、単振動の振幅を、 d を用いて表せ。

(オリジナル問題)

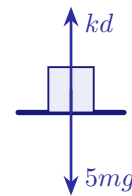
解説

振動の中心 (1) つり合い ——— ここが振動の中心

物体 1 + 物体 2 (質量 $5m$) にはたらく力は、重力 $5mg$ (下向き) とばねの弾性力 kd (上向き) の 2 つ (右の図)。つり合いより

$$kd = 5mg \quad \therefore \quad k = \frac{5mg}{d}.$$

物体 1 と物体 2 の間の垂直抗力は内力なので、全体のつり合いには現れない。



物体 1 + 2 ($5m$) のつり合い
ばねの縮みは d

$$k = \frac{5mg}{d} \quad \dots (\text{答})$$

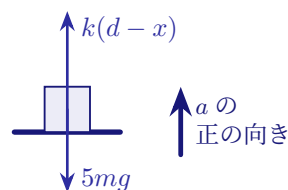
振動の中心 (2) 任意の点 x で運動方程式 ——— 全体で

物体 2 の座標が x のとき、ばねの縮みは $d - x$ 。両物体は接触して同じ加速度 a で動くので、全体 ($5m$) について上向きを正として

$$5ma = k(d - x) - 5mg = -kx \quad (kd = 5mg \text{ を使った}).$$

$k = \frac{5mg}{d}$ を入れて

$$a = -\frac{k}{5m}x = -\frac{g}{d}x.$$



物体 1 + 2 ($5m$) にはたらく力
ばねの縮みは $d - x$

$$a = -\frac{g}{d}x \quad \dots (\text{答})$$

振動の中心 (3) 周期 ——— $a = -\omega^2(x - x_c)$ と比べる

(2) を $a = -\omega^2(x - x_c)$ と見比べると $\omega^2 = \frac{g}{d}$, $x_c = 0$ 。振動の中心は O , 角振動数は $\sqrt{g/d}$ と決まる。

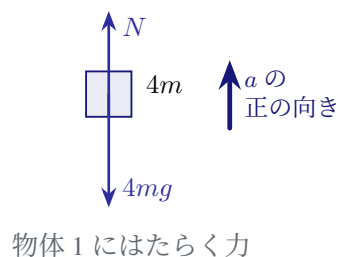
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}.$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}} \quad \dots (\text{答})$$

(4) 垂直抗力 —— 物体 1 だけの運動方程式に $a = -\omega^2 x$ を入れる

垂直抗力 N を知りたいので, N を受けている物体 1 だけに注目する。物体 1 にはたらく力は, 重力 $4mg$ (下向き) と垂直抗力 N (上向き)。接触している間は物体 1 の加速度も (2) の $a = -\frac{g}{d}x$ だから, 上向きを正として

$$4ma = N - 4mg \quad \therefore N = 4m(g + a) = 4mg\left(1 - \frac{x}{d}\right).$$

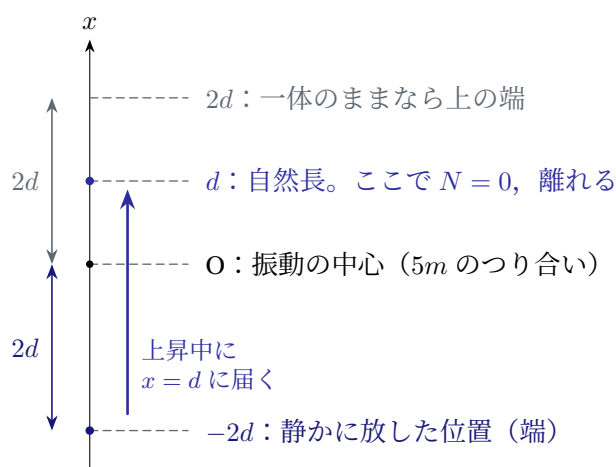


N は x の 1 次式で, 上に行くほど小さくなる。

● 振幅 定義域 —— どこまで接触しているか

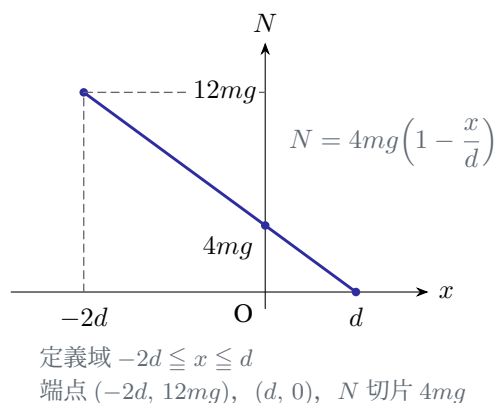
$x = -2d$ で静かに放したので, はじめは O を中心とする振幅 $2d$ の単振動として上昇する。 $N = 0$ となるのは $x = d$ 。これは振幅 $2d$ の範囲の中にあるので, 物体 1 は上昇の途中 $x = d$ で物体 2 から離れる (右の図)。この位置ではばねの縮みが $d - x = 0$, すなわち**ばねは自然長**である。離れるまでの定義域は

$$-2d \leq x \leq d.$$



● 図 グラフ

端点と切片を押さえる。 $x = -2d$ で $N = 4mg \cdot 3 = 12mg$, $x = 0$ で $N = 4mg$ (つり合いのときの値), $x = d$ で $N = 0$ 。グラフは右の図のとおり, この 3 点を通る線分である。



右図 … (答)

(5) 離れた後の物体 1 —— 分離の瞬間の速さを引き継いで投げ上げ

離れる直前まで、物体 1 は振幅 $2d$, $\omega = \sqrt{g/d}$ の単振動の一部として動いている。 $x = d$ での速さは、振動の中心から測ったエネルギー保存則で

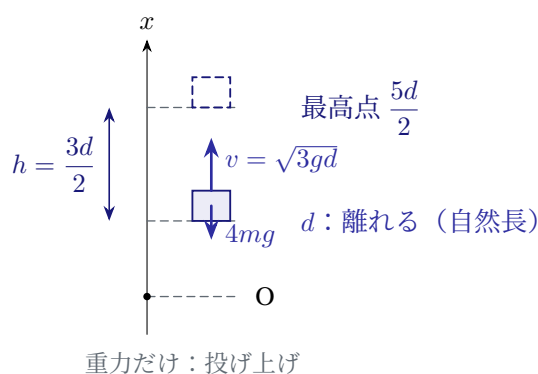
$$\frac{1}{2}k(2d)^2 = \frac{1}{2}(5m)v^2 + \frac{1}{2}kd^2$$

$$\therefore v^2 = \frac{3kd^2}{5m} = 3gd.$$

離れた後の物体 1 には重力しかはたらかない。初速 v の鉛直投げ上げなので、 $x = d$ から上がる高さは

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{3d}{2}$$

だから、原点からの高さは $d + \frac{3d}{2} = \frac{5d}{2}$ 。



$\frac{5d}{2}$

 ... (答)
(6) 離れた後の物体 2 —— 振動の中心・ ω ・振幅を取り直す

物体 1 が離れた瞬間から、物体 2 (質量 m) だけの単振動が始まる。§6 の順に進める。

● 振動の中心 中心と角振動数

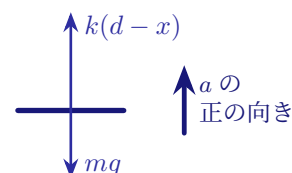
台だけが釣り合うのは、ばねの縮みが $\frac{mg}{k} = \frac{d}{5}$ のところ。自然長の位置が $x = d$ なので、新しい振動の中心 O' は

$$x'_c = d - \frac{d}{5} = \frac{4d}{5}.$$

運動方程式でも確かめる。任意の点 x で、物体 2 だけにはたらく力は右の図のとおり。ばねの縮みが $d - x$ だから

$$ma = k(d - x) - mg = -k\left(x - \frac{4d}{5}\right) \quad (kd = 5mg).$$

$$a = -\omega'^2(x - x'_c) \text{ と比べて } \omega' = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5g}{d}}, \text{ 中心も } x'_c = \frac{4d}{5}.$$



物体 2 (m) だけにはたらく力
物体 1 が離れたので N はない

● **振幅** 振幅 —— 分離の瞬間の「中心からの変位と速さ」から

離れた瞬間、物体2はO'から見て $X' = d - \frac{4d}{5} = \frac{d}{5}$ の位置にあり、速さは $v = \sqrt{3gd}$ 。

考え1 エネルギー保存則 O'から測って、端（速さ0、中心からA'）と比べる。

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{d}{5}\right)^2 = \frac{1}{2}kA'^2.$$

$mv^2 = 3mgd$, $k = \frac{5mg}{d}$ を入れて

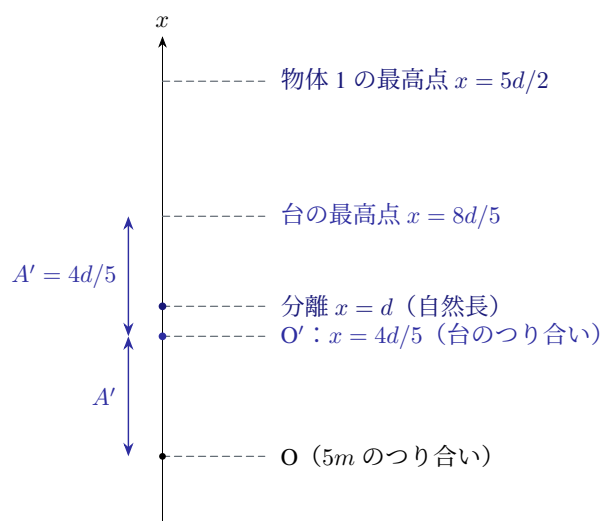
$$3mgd + \frac{mgd}{5} = \frac{5mg}{d}A'^2 \quad \therefore A'^2 = \frac{16d^2}{25}, \quad A' = \frac{4d}{5}.$$

考え2 x と v の関係式 $x - x'_c = \frac{d}{5}$, $v = \sqrt{3gd}$, $\omega'^2 = \frac{5g}{d}$ を入れて

$$A'^2 = \left(\frac{d}{5}\right)^2 + \frac{v^2}{\omega'^2} = \frac{d^2}{25} + \frac{3gd}{5g/d} = \frac{16d^2}{25} \quad \therefore A' = \frac{4d}{5}.$$

● **図** 位置関係を数直線で

O, O', 分離の位置, 両物体の最高点を数直線に並べると右の図になる。台の最高点は $x'_c + A' = \frac{8d}{5}$, 最下点は $x'_c - A' = 0$ 。放した位置 $-2d$ より上なので、床に触れる心配はない。



$$\boxed{A' = \frac{4d}{5}} \quad \cdots (\text{答})$$

(補足・発展。読み飛ばしてよい) 再接触までの確認:「再び接触するまで」の間、本当に物体2がこの単振動を続けるかを確かめておく。分離の瞬間、両物体の速度は等しく、加速度もともに $-g$ である。物体2が $x > d$ にある間は、その加速度 $-\omega'^2(x - 4d/5)$ が $-g$ より下向きに大きいので、物体2は物体1より下にあり、接触しない。物体2が $x < d$ に戻っている間、物体1はまだ $x > d$ にいる（物体1が $x = d$ に戻るのは分離から $2v/g = 2\sqrt{3}\sqrt{d/g}$ 後で、物体2の周期 $T' = 2\pi\sqrt{d/(5g)} \doteq 2.8\sqrt{d/g}$ より長い）。物体2が1周期を終えて再び $x > d$ へ上がってきたところで、落下してくる物体1とはじめて接触する。したがって再接触まで、物体2はこの振幅の単振動を続ける。

ここが要：この 1 題に単振動の部品が全部入っている

- (1) **全体**でつり合い＝振動の中心。任意の点で運動方程式 $\rightarrow a = -\omega^2(x - x_c)$ と比較して ω ((1)～(3))。
- (2) **知りたい力を受ける物体だけ**の運動方程式に $a = -\omega^2 x$ を入れる $\rightarrow N(x)$ 。 $N = 0$ が分離, その位置は自然長 ((4))。
- (3) 分離の瞬間の**位置と速さ**を引き継ぎ, 自由な物体は投げ上げ, ばねに残った物体は**新しい振動の中心**・ ω で単振動 ((5)(6))。